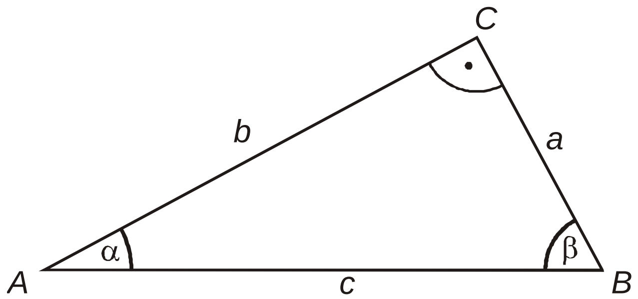
4.3.16 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Předpoklady: 040315

Př. 1: Nakresli pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ. Vysvětli pomocí obrázku, proč platí $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$. Najdi další podobné vztahy.



Pro úhel β platí: $\beta = 90° - \alpha \Rightarrow$ místo β můžeme psát $90° - \alpha$.

Platí: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)$. Dokázáno.

Ke vzorci $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ můžeme přidal tři další podobné:

- $\cos\alpha = \sin(90 - \alpha)$ (poměr $\frac{b}{c}$)
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90° - \alpha)$ (poměr $\frac{a}{b}$)
- $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$ (poměr $\frac{b}{a}$)

Př. 2: Bez kalkulačky rozhodni, které z následujících rovností platí.
a) $\sin 32° = \cos 32°$ b) $\cos 71° = \sin 19°$ c) $\sin 45° = \cos 45°$
d) $\operatorname{tg} 57° = \operatorname{cotg} 33°$ e) $\sin 23°34' = \cos 66°34'$ f) $\operatorname{tg} 49°23' = \operatorname{cotg} 40°37'$

a) $\sin 32° = \cos 32°$: neplatí (dva různé poměry, v pravoúhlém trojúhelníku, který není rovnoramenný nemají dvě odvěsny stejnou velikost).
b) $\cos 71° = \sin 19°$: platí ($19° = 90° - 71°$)
c) $\sin 45° = \cos 45°$: platí (dva různé poměry, ale v trojúhelníku se shodnými odvěsnami, navíc platí $45° = 90° - 45°$).
d) $\operatorname{tg} 57° = \operatorname{cotg} 33°$: platí ($33° = 90° - 57°$)
e) $\sin 23°34' = \cos 66°34'$: neplatí ($23°34' \neq 90° - 66°34'$)
f) $\operatorname{tg} 49°23' = \operatorname{cotg} 40°37'$: platí ($49°23' \neq 90° - 40°37'$)

Př. 3: Uspořádej čísla od nejmenšího k největšímu bez kalkulačky i tabulek.
a) $\sin 23°$, $\sin 68°$, $\sin 40°$
b) $\cos 15°$, $\sin 77°$, $\cos 53°$, $\sin 28°$, $\cos 84°$

a) $\sin 23°$, $\sin 68°$, $\sin 40°$

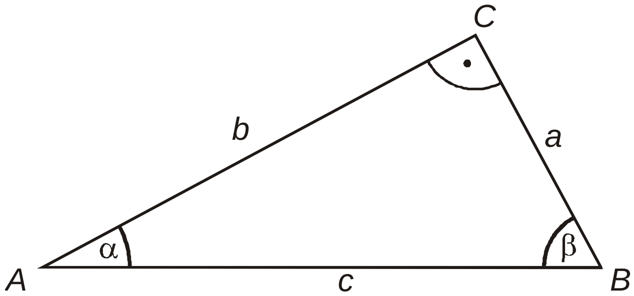
Jde o hodnoty funkce sinus, která je rostoucí (z větších úhlů vytváří větší hodnoty poměru) $\Rightarrow$ $\sin 23° < \sin 40° < \sin 68°$.

b) $\cos 15°$, $\sin 77°$, $\cos 53°$, $\sin 28°$, $\cos 84°$
Porovnávání by bylo snadné, kdybychom měli pouze hodnoty jedné funkce $\Rightarrow$ použijeme vztah $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ a převedeme všechny siny na kosiny:

- $\sin 77° = \cos 12°$,
- $\sin 28 = \cos 62°$.

Funkce kosinus je klesající (z větších hodnot úhlu vytváří menší hodnoty poměru) $\Rightarrow$
$\cos 12° > \cos 15° > \cos 53° > \cos 62° > \cos 84°$
$\sin 77° > \cos 15° > \cos 53° > \sin 28° > \cos 84°$

Př. 4: Najdi v obrázku vztah mezi $\mathrm{tg}\,\alpha$ a $\mathrm{cotg}\,\alpha$.



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$ $\Rightarrow$ podobné definice, pouze prohození čitatele a jmenovatele $\Rightarrow$
$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha = 1$

Důkaz: $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Př. 5: Při zavádění funkce tangens jsme si všimli vztahu $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Najdi podobný vztah pro $\mathrm{cotg}\,\alpha$.

$\mathrm{cotg}\,\alpha$ je převrácenou hodnotou $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Př. 6: Odvoď z Pythagorovy věty vztah mezi $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$.

Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2 \qquad / : c^2$
(potřebujeme vytvořit hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$, obě mají ve jmenovateli c)
$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$
Shrnutí: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Pro goniometrické funkce $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ platí vztah $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Dodatek: Předchozí vzorec bývá často označován jako goniometrická jednička.

Množství vztahů mezi goniometrickými funkcemi umožňuje určit z hodnoty jedné funkce i hodnoty funkcí ostatních.

Př. 7: Bez toho abys určil hodnotu úhlu α, urči hodnoty ostatních goniometrických funkci pro tento úhel, jestliže platí $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Nejdříve vypočteme hodnotu funkce $\cos\alpha$:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad / -\sin^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Teď můžeme snadno určit i hodnoty zbývajících funkcí.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Pokud platí $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, platí i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}$.

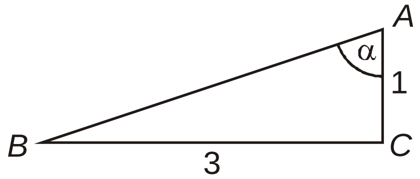
Př. 8: Bez toho abys určil hodnotu úhlu α, urči hodnoty ostatních goniometrických funkci pro tento úhel, jestliže platí $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Nejjednodušší je určení funkce $\operatorname{cotg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \quad / : \operatorname{tg}\alpha$

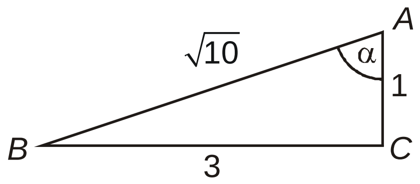
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{3}$$

Problém: V žádném vzorci nevystupuje samotná funkce $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$) a jedna z funkcí $\operatorname{tg}\alpha$ (nebo $\operatorname{cotg}\alpha$).

Řešení: $\operatorname{tg}\alpha = 3 \Rightarrow$ známe poměr odvěsen, můžeme si zvolit pravoúhlý trojúhelník s tímto poměrem odvěsen, dopočítat přeponu a z ní určit hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$.



Délka přepony: $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$



Z obrázku vidíme:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Pokud platí $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$, platí i $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ a $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Shrnutí: Mezi goniometrickými funkce je mnoho vztahů vycházejících z poměrů strane nebo Pythagorovy věty.